

Ю.Г. Кравченко, канд. техн. наук, Днепропетровск, Украина

## РАСПРЕДЕЛЕНИЕ КОНТАКТНОЙ ТЕМПЕРАТУРЫ НА РЕЖУЩЕМ КЛИНЕ

Приведен аналитический расчет температурного поля на полуплоскости клина при равномерном распределении плотности полосового источника теплоты, получена формула среднего значения температуры.

The analytical calculation of the temperature field is conducted on the semiplane of wedge at the even distributing of density of strip source of warmth, the formula of average value of temperature is got.

### *Введение*

Среди основных факторов влияния на интенсивность изнашивания и период стойкости режущих инструментов контактная температура при резании занимает первостепенное значение. Выход напрямую на контактную температуру, оказывающую непосредственное воздействие на процессы трибологии, является приоритетным. Из-за сложностей аналитического и экспериментального исследования контактных температур проблема совершенствования методов расчета температуры резания остается актуальной.

При конкретных условиях процесса резания (формы лезвия и режимов резания) температура трения-скольжения на передней или задней поверхностях лезвия прежде всего зависит от плотности теплового потока  $q = \varepsilon^* \cdot F \cdot v / f$  ( $F$  – касательная сила трения,  $v$  – скорость схода стружки или резания,  $f$  – контактная площадь зоны трения,  $\varepsilon^*$  – коэффициент распределения тепловых потоков между рабочими телами) и теплофизических свойств обрабатываемого и инструментального материалов.

В свою очередь температура резания связана с системой теплообменов в зоне резания между заготовкой, лезвием и стружкой.

Для точного расчета контактных температур необходимы исходные данные по температурным полям контактных поверхностей лезвия (контртела в виде клина) и движущихся источников теплоты (со стороны стружки и заготовки) и по распределению тепловых потоков из зоны резания.

Цель работы заключается в расчете температурного поля на поверхности трения режущего клина и его среднего значения.

Вывод формулы среднего значения температурного поля режущего клина для численного определения плотности тепловых стоков через

переднюю и заднюю поверхности способствует сокращению алгоритма расчета контактных температур.

### Постановка задачи

Методом решения выбран метод источников теплоты – системы точечных мгновенных (ТМ) /1, 2/ и отраженных (фиктивных) /1, 3/ источников.

Основой для расчетов служила полученная с использованием выражения теплопроводности Кельвина для ТМ источника в неограниченном теле и правила отражения источников (полуограниченное тело мысленно превращается в неограниченное) известная формула /1, 2, 3/ для температуры (удвоенной) линейного мгновенного (ЛМ) источника на поверхности полуограниченного тела ( $z = z_1 = 0, -\infty < y < +\infty$ )

$$Q_{\text{лн}} = \frac{Q_{\text{лн}}}{2\pi\lambda\tau} \exp\left[-\frac{(x-x_1)^2}{4a\tau}\right], \quad (1)$$

где  $Q_{\text{лн}}$  (Дж/м) – удельная энергия теплового импульса;  $\lambda$  и  $a$  – коэффициенты тепло- и температуропроводности;  $\tau$  – время наблюдения температуры после импульса теплоты;  $x_1$  – абсцисса ЛМ источника по оси  $x$ .

Расчетная схема представлена на рис. 1. Рассматриваемое тело ограничено двумя полуплоскостями  $xy$  и  $yz$  и представляет собой бесконечный вдоль оси  $y$  прямой клин.

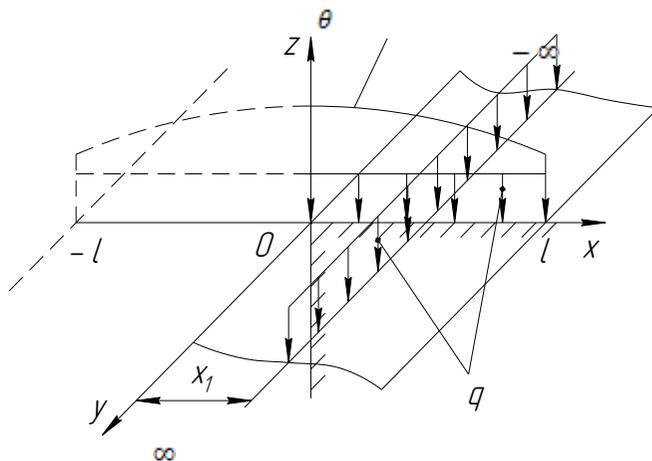


Рисунок 1 – Расположение источника теплоты плотностью  $q$  и распределение температуры  $\theta$  на поверхности трения  $xy$  клина.

На полосе  $0 < x_1 < l$  шириной  $l$  действует равномерно распределенный непрерывный источник теплоты, полуплоскость  $y \geq 0$  - адиабатическая. Симметрично действующему источнику введен отраженный на полосе  $-l < -x_1 < 0$  для преобразования формы клина в полуограниченное тело.

Принято, что отбор теплоты за счет конвективного теплообмена с окружающей средой (охлаждения) не происходит.

Данная схема расчета моделирует процесс свободного резания. Зависимость температуры от угла заострения (раствора) клина  $\beta$  учитывается коэффициентом формы клина  $1/3/\kappa_\beta$ . По отношению к прямому клину  $\kappa_\beta = 90^\circ/\beta$  (например,  $\kappa_\beta = 1,5$  при  $\beta = 60^\circ$ ).

### Основная часть

Решение задачи имеет два направления расчета путем интегральных переходов от ЛМ источника к полосовому непрерывно (ПоН) действующему.

1. Переход от полосового мгновенного (ПоМ) источника.

Вначале интегрированием выражения  $Q_{\text{лм}}$  (1) по  $x_1$  рассчитывается температура от действующего и отраженного ПоМ источников с удельной теплотой  $Q_{\text{пом}}$  (Дж/м<sup>2</sup>) /1, 3/

$$\theta_{\text{пом}} = \int_{-x}^x \theta_{\text{лм}} \cdot dx_1 = \frac{Q_{\text{пом}}}{2\pi\lambda\tau} \int_{-l}^l \exp\left[-\frac{(x-x_1)^2}{4a\tau}\right] dx_1. \quad (2)$$

При помощи подстановки  $\frac{x-x_1}{\sqrt{4a\tau}} = p$ ,  $dx_1 = -\sqrt{4a\tau} \cdot dp$  и

пределов  $p_1 = \frac{x+l}{\sqrt{4a\tau}}$  при  $x_1 = -l$  и  $p_2 = \frac{x-l}{\sqrt{4a\tau}}$  при  $x_1 = l$  получаем

$$I = -\sqrt{4a\tau} \cdot \left( \int_{\frac{x+l}{\sqrt{4a\tau}}}^0 e^{-p^2} \cdot dp + \int_0^{\frac{x-l}{\sqrt{4a\tau}}} e^{-p^2} \cdot dp \right). \text{ Тогда}$$

$$\theta_{\text{пом}} = \frac{Q_{\text{пом}} \cdot \sqrt{a}}{\pi \cdot \lambda \cdot \sqrt{\tau}} \cdot \left( \int_0^{\frac{x+l}{\sqrt{4a\tau}}} e^{-p^2} \cdot dp - \int_0^{\frac{x-l}{\sqrt{4a\tau}}} e^{-p^2} \cdot dp \right). \quad (3)$$

Затем выполняется интегрирование  $\theta_{\text{пом}}$  (3) по  $\tau_i$

$$\theta_{\text{пом}} = \int_0^\tau \theta_{\text{пом}} \cdot d\tau_i =$$

$$= \frac{q_{\text{ПОН}} \cdot \sqrt{a}}{\pi \cdot \lambda} \int_0^{\tau} \left( \int_0^{\frac{x+l}{\sqrt{4a(\tau-\tau_i)}}} e^{-p^2} dp - \int_0^{\frac{x-l}{\sqrt{4a(\tau-\tau_i)}}} e^{-p^2} dp \right) \cdot \frac{d\tau_i}{\sqrt{\tau - \tau_i}}. \quad (4)$$

Здесь  $q_{\text{ПОН}}$  (Вт/м<sup>2</sup>) – плотность ПоН источника;  $\tau_i$  – момент времени импульса теплоты;  $\tau$  – момент времени наблюдения (фиксации) температуры;  $\tau - \tau_i$  – время распространения теплоты от  $i$ -го импульса.

Для вычисления  $I_1$  в (4) воспользуемся подстановкой

$$\frac{x+l}{\sqrt{4a(\tau-\tau_i)}} = \delta, \quad \text{откуда } \tau_i = \tau - \frac{(x+l)^2}{4a \cdot \delta^2}, \quad \left(\frac{1}{\delta^2}\right) = -\frac{2}{\delta^3},$$

$$d\tau_i = \frac{(x+l)^2}{2 \cdot a} \cdot \frac{d\delta}{\delta^3}, \quad \sqrt{\tau - \tau_i} = \frac{x+l}{\sqrt{4a \cdot \delta}}, \quad \delta_1 = \frac{x+l}{\sqrt{4a\tau}} \text{ при } \tau_i = 0 \text{ и}$$

$$\delta_2 = \infty \text{ при } \tau_i = \tau. \text{ В результате}$$

$$I_1 = \int_{\delta_1}^{\delta_2} \left( \int_0^{\delta} e^{-p^2} \cdot dp \right) \cdot \frac{(x+l)^2}{2a} \cdot \frac{d\delta}{\delta^3} \cdot \frac{\sqrt{4a \cdot \delta}}{x+l} =$$

$$= \frac{x+l}{\sqrt{a}} \cdot \int_{\frac{x+l}{\sqrt{4a\tau}}}^{\infty} \left( \int_0^{\delta} e^{-p^2} \cdot dp \right) \cdot \frac{d\delta}{\delta^2}.$$

Аналогично при подстановке  $\frac{x-l}{\sqrt{4a(\tau-\tau_i)}} = \lambda$  имеем

$$I_2 = \frac{x-l}{\sqrt{a}} \cdot \int_{\frac{x-l}{\sqrt{4a\tau}}}^{\infty} \left( \int_0^{\lambda} e^{-p^2} \cdot dp \right) \cdot \frac{d\lambda}{\lambda^2}.$$

Интегрирование  $I_1$  и  $I_2$  выполним по частям с  $U = \int_0^{\kappa} e^{-p^2} dp$  и

$$dV = \frac{d\kappa}{\kappa^2}. \quad \text{Находим интегрированием } V = \int \kappa^{-2} \cdot d\kappa = -\frac{1}{\kappa} \quad \text{а}$$

дифференцированием  $dU = d\left(\int e^{-p^2} \cdot dp\right) = e^{-p^2} \cdot dp$ . Запишем

$$I_x = I_1 - I_2 = \frac{x+l}{\sqrt{a}} \cdot \int_0^{\delta} e^{-p^2} \cdot dp \cdot \left(-\frac{1}{\delta}\right) \left| \frac{\infty}{\sqrt{4a\tau}} - \frac{x+l}{\sqrt{a}} \int_{\frac{x+l}{\sqrt{4a\tau}}}^{\infty} \left(-\frac{1}{\delta}\right) \cdot e^{-p^2} \cdot dp - \right.$$

$$\left. - \frac{x-l}{\sqrt{a}} \cdot \int_0^{\lambda} e^{-p^2} \cdot dp \left(-\frac{1}{\lambda}\right) \left| \frac{\infty}{\sqrt{4a\tau}} + \frac{x-l}{\sqrt{a}} \cdot \int_{\frac{x-l}{\sqrt{4a\tau}}}^{\infty} \left(-\frac{1}{\lambda}\right) \cdot e^{-p^2} \cdot dp \right.$$

Интегралы  $\int_{\frac{x+l}{\sqrt{4a\tau}}}^{\infty} \frac{1}{\delta} \cdot e^{-p^2} \cdot dp$  и  $\int_{\frac{x-l}{\sqrt{4a\tau}}}^{\infty} \frac{1}{\lambda} \cdot e^{-p^2} \cdot dp$  имеют одинаковый

вид. Для них применим подстановку  $s = p^2$  с  $ds = 2p dp$ ,  $\frac{ds}{s} = \frac{2dp}{p}$ ,  $\frac{dp}{p} = \frac{ds}{2s}$  и выполним замену нижних пределов интегрирования  $\delta_1 = \frac{x+l}{\sqrt{4a\tau}}$  и  $\lambda_1 = \frac{x-l}{\sqrt{4a\tau}}$  соответственно на  $\frac{(x+l)^2}{4a\tau}$  и  $\frac{(x-l)^2}{4a\tau}$ . После преобразований находим

$$I_x = -\frac{x+l}{\sqrt{a}} \cdot \left(\frac{1}{\infty}\right) \int_0^{\infty} e^{-p^2} \cdot dp + \frac{x+l}{\sqrt{a}} \cdot \frac{\sqrt{4a\tau}}{x+l} \int_0^{\frac{x+l}{\sqrt{4a\tau}}} e^{-p^2} \cdot dp +$$

$$+ \frac{x+l}{2 \cdot \sqrt{a}} \int_{\frac{(x+l)^2}{4a\tau}}^{\infty} e^{-s} \cdot \frac{ds}{s} +$$

$$+ \frac{x-l}{\sqrt{a}} \cdot \left(\frac{1}{\infty}\right) \int_0^{\infty} e^{-p^2} \cdot dp - \frac{x-l}{\sqrt{a}} \cdot \frac{\sqrt{4a\tau}}{x-l} \int_0^{\frac{x-l}{\sqrt{4a\tau}}} e^{-p^2} \cdot dp - \frac{x-l}{2 \cdot \sqrt{a}} \int_{\frac{(x-l)^2}{4a\tau}}^{\infty} e^{-s} \cdot \frac{ds}{s} =$$

$$= \frac{1}{2 \cdot \sqrt{a}} \left[ (x+l) \int_{\frac{(x+l)^2}{4a\tau}}^{\infty} e^{-s} \frac{ds}{s} - (x-l) \int_{\frac{(x-l)^2}{4a\tau}}^{\infty} e^{-s} \frac{ds}{s} + \right.$$

$$\left. + 4\sqrt{a\tau} \left( \int_0^{\frac{x+l}{\sqrt{4a\tau}}} e^{-p^2} dp - \int_0^{\frac{x-l}{\sqrt{4a\tau}}} e^{-p^2} dp \right) \right]. \quad (5)$$

2. Переход от линейного непрерывного (ЛН) источника.  
Температура ЛН источника с плотностью  $q_{\text{ЛН}}$  (Вт/м) равна /2, 3/

$$\theta_{\text{ЛН}} = \int_0^{\tau} \theta_{\text{ЛН}} \cdot d\tau_i = \frac{q_{\text{ЛН}}}{2\pi\lambda} \int_0^{\tau} \exp \left[ -\frac{(x-x_1)^2}{4a(\tau-\tau_i)} \right] \cdot \frac{d\tau_i}{\tau-\tau_i}. \quad (6)$$

Обозначим  $\frac{(x-x_1)^2}{4a(\tau-\tau_i)} = s$ . В свою очередь  $\tau_i = \tau - \frac{(x-x_1)^2}{4as}$ ,  
 $\left(\frac{1}{s}\right)' = -\frac{1}{s^2}$ ,  $d\tau_i = \frac{(x-x_1)^2 \cdot dx}{4as^2}$ ,  $\tau - \tau_i = \frac{(x-x_1)^2}{4as}$ ,  $s_1 = \frac{(x-x_1)^2}{4a\tau}$   
 с  $\tau_i = 0$  и  $s_2 = \infty$  с  $\tau_i = \tau$ . В итоге

$$\theta_{\text{ЛН}} = \frac{q_{\text{ЛН}}}{2\pi\lambda} \int_{\frac{(x-x_1)^2}{4a\tau}}^{\infty} e^{-s} \cdot \frac{ds}{s}. \quad (7)$$

Вторым этапом расчета является определение температуры ПоН источника в области  $-x < x_1 < x$

$$\theta_{\text{ПоН}} = \int_{-x}^x \theta_{\text{ЛН}} \cdot dx_1 = \frac{q_{\text{ПоН}}}{2\pi\lambda} \int_{-l}^l \left( \int_{\frac{(x-x_1)^2}{4a\tau}}^{\infty} e^{-s} \cdot \frac{ds}{s} \right) \cdot dx_1. \quad (8)$$

Вводим замену  $\frac{x-x_1}{\sqrt{4a\tau}} = p$ , находим  $dx_1 = -\sqrt{4a\tau} \cdot dp$ ,  $p_1 = \frac{x+l}{\sqrt{4a\tau}}$   
 при  $x_1 = -l$  и  $p_2 = \frac{x-l}{\sqrt{4a\tau}}$  при  $x_1 = l$ . Тогда

$$\theta_{\text{ПоН}} = \frac{q_{\text{ПоН}} \cdot \sqrt{4a\tau}}{2\pi\lambda} \int_{\frac{x-l}{\sqrt{4a\tau}}}^{\frac{x+l}{\sqrt{4a\tau}}} \left( \int_{p^2}^{\infty} e^{-s} \cdot \frac{ds}{s} \right) \cdot dp.$$

Интегрирование проводим по частям с  $U = \int_{p^2}^{\infty} e^{-s} \frac{ds}{s}$ ,  $dV = dp$ ,

$dU = -2 \cdot e^{-p^2} \cdot \frac{dp}{p}$  ( $s = p^2, ds = 2pdp$ ) и  $V = p$ . В результате находим

$$\begin{aligned}
I &= \left[ \left( \int_{p^2}^{\infty} e^{-s} \cdot \frac{ds}{s} \right) \cdot p \right] \frac{x+l}{\sqrt{4a\tau}} - \int_{\frac{x-l}{\sqrt{4a\tau}}}^{\frac{x+l}{\sqrt{4a\tau}}} p \left( -2 \cdot e^{-p^2} \cdot \frac{dp}{p} \right) = \\
&= \frac{x+l}{\sqrt{4a\tau}} \int_{\frac{(x+l)^2}{4a\tau}}^{\infty} e^{-s} \cdot \frac{ds}{s} - \frac{x-l}{\sqrt{4a\tau}} \int_{\frac{(x-l)^2}{4a\tau}}^{\infty} e^{-s} \cdot \frac{ds}{s} + \\
&+ 2 \left( \int_{\frac{x-l}{\sqrt{4a\tau}}}^0 e^{-p^2} \cdot dp + \int_0^{\frac{x+l}{\sqrt{4a\tau}}} e^{-p^2} \cdot dp \right) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{4a\tau}} \left[ (x+l) \int_{\frac{(x+l)^2}{4a\tau}}^{\infty} e^{-s} \cdot \frac{ds}{s} - (x-l) \int_{\frac{(x-l)^2}{4a\tau}}^{\infty} e^{-s} \frac{ds}{s} + \right. \\
&\quad \left. + 4\sqrt{a\tau} \left( \int_0^{\frac{x+l}{\sqrt{4a\tau}}} e^{-p^2} dp - \int_0^{\frac{x-l}{\sqrt{4a\tau}}} e^{-p^2} dp \right) \right]. \tag{9}
\end{aligned}$$

Выражения в скобках (5) и (9) для  $\theta_{\text{пон}}$  (4) и (8) дают одинаковый результат двух решений.

После введения безразмерного параметра  $\psi = x/l$  и критерия Фурье  $F_o = a\tau/l^2$  имеем

$$\begin{aligned}
\theta_{\text{пон}} &= \frac{q_{\text{пон}} \cdot l}{2\pi\lambda} \left[ (1+\psi) \int_{\frac{(1+\psi)^2}{2\sqrt{F_o}}}^{\infty} e^{-s} \frac{ds}{s} + (\psi-1) \int_{\frac{(\psi-1)^2}{2\sqrt{F_o}}}^{\infty} e^{-s} \frac{ds}{s} + \right. \\
&\quad \left. + 4\sqrt{F_o} \left( \int_0^{\frac{1+\psi}{2\sqrt{F_o}}} e^{-p^2} \frac{dp}{p} - \int_0^{\frac{\psi-1}{2\sqrt{F_o}}} e^{-p^2} \frac{dp}{p} \right) \right]. \tag{10}
\end{aligned}$$

#### *Результаты расчета*

Завершающей стадией расчета являются формулы для вычисления температурного поля и его средней температуры.

Входящие в (10) определённые интегралы представляются в виде числовых рядов /4, 5/ интегральной показательной функции для малых значений  $t$

$$-E_i(-t) = \int_t^{\infty} e^{-s} \frac{ds}{s} = -c - \ln t - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{t^n}{n \cdot n!}$$

с постоянной Эйлера  $c = 0,5772$  и функции интеграла вероятности

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \operatorname{erf} u = \int_0^u e^{-p^2} dp = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{u^{2n+1}}{(2n+1) \cdot n!}.$$

При  $n = 1$  ввиду малости значений  $t = 1/F_0$  и  $u = 1/\sqrt{F_0}$

$$\begin{aligned} I_{\theta} &= (1 + \psi) \cdot \left[ -c - \ln \left( \frac{1 + \psi}{2\sqrt{F_0}} \right)^2 + \left( \frac{1 + \psi}{2\sqrt{F_0}} \right)^2 \right] + \\ &+ (1 - \psi) \cdot \left[ -c - \ln \left( \frac{\psi - 1}{2\sqrt{F_0}} \right)^2 + \left( \frac{\psi - 1}{2\sqrt{F_0}} \right)^2 \right] + \\ &+ 4\sqrt{F_0} \cdot \left[ \frac{1 + \psi}{2\sqrt{F_0}} - \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{1 + \psi}{2\sqrt{F_0}} \right)^3 - \frac{\psi - 1}{2\sqrt{F_0}} + \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{\psi - 1}{2\sqrt{F_0}} \right)^3 \right] = \\ &= 2 \left[ 2 - c + \ln 4 + \ln F_0 - (1 + \psi) \ln(1 + \psi) - \right. \\ &\quad \left. - (1 - \psi) \ln(1 - \psi) + \frac{1 + 3\psi^2}{12F_0} \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

После подстановки (11) в (10) искомая формула распределения температуры на полуплоскости клина от ПоН источника принимает окончательный вид.

$$\begin{aligned} \theta_{\text{ПОН}} &= \frac{q_{\text{ПОН}} \cdot l}{\pi \lambda} \left[ 2,809 + \ln F_0 - (1 + \psi) \ln(1 + \psi) - \right. \\ &\quad \left. - (1 - \psi) \ln(1 - \psi) + \frac{1 + 3\psi^2}{12F_0} \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

Функция распределения температурного поля  $U(\psi)$  в (12) максимальное значение имеет при  $\psi = 0$ , минимальное – при  $\psi = 1$ .

Средняя температура поля определяется по формуле

$$\theta_{\text{ср}} = \frac{1}{\psi_{\text{max}}} \int_0^{\psi_{\text{max}}} \theta_{\text{ПОН}} \cdot d\psi = \frac{q_{\text{ПОН}} \cdot l}{\pi \lambda} \int_0^1 U(\psi) \cdot d\psi.$$

После отдельного интегрирования и суммирования составляющих функции распределения  $U(\psi)$

$$I_1 = \int_0^1 \ln(1 + \psi) d\psi = 2 \ln 2 - 1; \quad I_2 = \int_0^1 \psi \ln(1 + \psi) d\psi = 0.25;$$

$$I_3 = \int_0^1 \ln(1 - \psi) d\psi = -1; \quad I_4 = \int_0^1 \psi \ln(1 - \psi) d\psi = -0.75;$$

$$I_5 = \int_0^1 \ln(1 + 3\psi^2) d\psi = 2$$

получаем расчетную формулу

$$\theta_{\text{ср}} = \frac{q_{\text{поян}} \cdot l}{\pi \lambda} \left( 2,423 + \ln F_0 + \frac{1}{6 \cdot F_0} \right). \quad (13)$$

Дальнейшее развитие формулы (13) направлено на расчет температурного поля лезвия с двумя адиабатическими задними поверхностями.

#### *Заключение*

1. Рассмотрено два направления расчета распределения контактной температуры на полуплоскости трения бесконечного клина на основе метода источников теплоты. Получена компактная формула среднего значения температурного поля.

2. Найдено, что интегральные переходы от полосового мгновенного и от линейного непрерывного источника к полосовому непрерывному приводят к интегральной показательной функции и функции интеграла вероятности с разложением их в числовой ряд.

3. Переход от линейного непрерывного источника является более простым. Одинаковое выражение функции распределения температуры двух различных направлений подтверждает правильность расчета.

**Список литературы:** 1. Рыкалин Н.Н. Расчеты тепловых процессов при сварке. – М.: Машгиз, 1951. – 296с. 2. Карслоу Г.С., Егер Д.К. Теплопроводность твердых тел. – М.: Наука, 1964. – 487с. 3. Резников А.Н. Теплофизика процессов механической обработки материалов. – М.: Машиностроение, 1981. – 279с. 4. Справочник по математике для научных работников и инженеров /Г.Корн, Т.Корн. – Изд. четверное. – М.: Наука, 1977. – 832с. 5. Справочник по специальным функциям /Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. – М.: Наука, 1979. – 830с.

УДК 621.91